1. Функциялық қатарлар.

Анықтама 1: Мүшелері *x* айнымалысынан тәуелді функциялар болатын

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (1)$$

қатары *функциялық қатар* деп аталады.

x айнымалысына x_0 мәнін берсек

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \ldots + u_n(x_0) + \ldots \qquad (2)$$

жинақты немесе жинақсыз болатын сандық қатарын аламыз.

Анықтама 2: Егер алынған (2) сандық қатары жинақты болса, онда x_0 нүктесі (1) функциялық қатарының *жинақтылық нүктесі*, ал (2) сандық қатары жинақсыз болса, онда x_0 нүктесі (1) функциялық қатарының *жинақсыздық нүктесі* деп аталады.

Анықтама 3: *x* аргументінің функциялық қатар жинақты болатын сандық мәндерінің жиынын *жинақтылық облысы* деп атаймыз.

Функциялық қатардың жинақтылық облысында оның *қосындысы x* айнымалысынан тәуелді функцияны береді:

$$S = S(x).$$

$S(x)$ қосындысы жинақтылық облысында

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) \qquad (3)$$

теңдігімен анықталады, мұндағы

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$$

қатардың дербес қосындысы.

Мысал 1: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ қатарының жинақтылық облысын табыңыз.

Шешімі: Берілген $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^{3.} + \ldots + x^n + \ldots$ қатары еселігі $q = x$ болатын геометриялық қатар. Демек, бұл қатар $|x| < 1$ болса жинақты, яғни $x \in (-1; 1)$.

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

Мысал 2: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2}$ функциялық қатарын жинақтылыққа зерттеңіз.

Шешімі: Берілген қатардың абсолюттік шамасынан қатар құрайық:

$$\left|\frac{\sin x}{1^2}\right| + \left|\frac{\sin 2^2 x}{2^2}\right| + \ldots + \left|\frac{\sin n^2 x}{n^2}\right| + \ldots.$$

Кез келген $x \in R$ үшін

$$\left|\frac{\sin n^2 x}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2},$$

ал жалпы мүшесі $\frac{1}{n^2}$ болатын $(\lambda = 2 > 1)$ жалпы гармониялық қатар жинақты. Үлкен қатардың жинақтылығынан кіші қатардың жинақтылығы алынады. Онда берілген қатар барлық $x \in R = (-\infty; +\infty)$ үшін абсолютті жинақты болады.

2. Дәрежелік қатарлар.

Анықтама 4: Мүшелері x аргументті дәрежелік функциялар болатын қатар

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (4)$$

дәрежелік қатар деп аталады.

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ нақты сандары (4) қатарының коэффициенттері; $x \in R$ - нақты айнымалы. (4) қатары x дәрежесі бойынша алынған. Дәрежелік қатарды $(x - x_0)$ дәрежесі бойынша алсақ

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \ldots + a_n (x - x_0)^n + \ldots \qquad (5)$$

қатарын аламыз, мұндағы x_0 кез келген тұрақты сан. $x - x_0 = z$ деп алсақ, онда (4) қатарын аламыз.

3. Дәрежелік қатардың жинақтылығы.

(4) дәрежелік қатарының жинақтылығын қарастырайық. (4) дәрежелік қатарының жинақтылық облысы ең болмағанда $x = 0$ нүктесіне ие болады. ((5) қатары $x = x_0$ нүктесінде жинақты).

Абель теоремасы: Егер (4) дәрежелік қатары $x = x_0 \neq 0$ болғанда жинақты болса, онда ол

$$|x| < |x_0|$$

теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x мәнінде абсолютті жинақты болады.

Салдар: Егер (4) дәрежелік қатары $x = x_1$ болғанда жинақсыз болса, онда ол $|x| > |x_1|$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x мәнінде жинақсыз болады.

4. Дәрежелік қатардың жинақтылық радиусы және интервалы

Егер $x_0 \neq 0$ болса Абель теоремасы бойынша дәрежелік қатардың жинақтылық нүктесі бар, онда $(-|x_0|; |x_0|)$ интервалы берілген қатардың барлық жинақтылық нүктелерінен тұрады, ал интервалдан тыс x-тің барлық мәндерінде (4) қатары жинақсыз:

сурет 1

$(-|x_0|;|x_0|)$ дәрежелік қатардың *жинақтылық интервалы* деп аталады.
$|x_0| = R$ десек, жинақтылық интервалын $(-R; R)$ түрінде жазуға болады.
R санын дәрежелік қатардың *жинақтылық радиусы* деп атаймыз, яғни $R > 0$ саны барлық $|x_0| < R$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x үшін (4) қатары абсолютті жинақты, ал $|x_0| > R$ болса, қатар жинақсыз (сурет 1).

- Дербес жағдайда (4) қатары тек бір $x_0 = 0$ нүктесінде жинақты, онда $R = 0$ деп санаймыз;
- Егер (4) қатары x-тің барлық мәнінде $x \in R$ (сан өсінің барлық нүктелерінде) жинақты болса, онда $R = \infty$. Жинақтылық интвалдарының ұштарында (яғни $x = -R$ және $x = R$) қатардың жинақтылығы әр жағдайда жекелей қарастырылады.

(4) дәрежелік қатарының жинақтылық радиусын табу үшін берілген дәрежелік қатардың мүшелерінің абсолюттік шамасынан қатар құраймыз:

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots,$$

Даламбер белгісін қолдансақ

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \neq 0, \quad x \neq 0.$$

Даламбер белгісі бойынша қатар жинақты, егер

$$|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1,$$

яғни $|x| < \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ болса.

(4) дәрежелік қатарының мүшелерінің абсолюттік шамасынан құралған қатар барлық x үшін

$$|x| > \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

болғанда жинақсыз.
(4) дәрежелік қатарының абсолюттік жинақтылығының радиусы

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{6}$$

Кошидің радикалдық белгісін қолдансақ, онда жинақтылық радиусы

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \tag{7}$$

формуласымен табылады.
Ескерту:

- Егер $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$ болса, онда (4) дәрежелік қатары бүкіл сан өсінде абсолютті жинақты, бұл жағдайда $R=\infty$. Егер $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$ болса, онда $R=0$.
- (5) дәрежелік қатарының жинақтылық интервалы
  $|x-x_0|<R$
  теңсіздігінен табылады. $(x_0-R; x_0+R)$ түрінде жазылады.
- Егер дәрежелік қатар x-тің барлық дәрежелерін қамтымаса, яғни толық емес дәрежелік қатар берілсе, онда қатардың жинақтылығының интервалы жинақтылық радиусының анықтамасынсыз ((6), (7) формулаларының көмегінсіз) берілген қатардың мүшелерінің абсолюттік шамасынан құралған қатарға тікелей Даламбер (Коши) белгілерін қолдану арқылы табылады.

5. Дәрежелік қатардың қасиеттері

- (4) дәрежелік қатарының $S(x)$ қосындысы $(-R; R)$ жинақтылық интервалында үзіліссіз функция болады;
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ және $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ дәрежелік қатарларының жинақтылық радиусы R_1 және R_2 болса, оларды мүшелеп қосуға, азайтуға, көбейтуге болады;
  Қатардың қосындысының, айырмасының, көбейтіндісінің жинақтылық радиусы R_1 және R_2 сандарынан кем болмайды;
- Жинақтылық интервалының ішінде дәрежелік қатарды мүшелеп дифференциалдауға болады, онда
  $$S(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots \qquad (8)$$
  қатары үшін $-R<x<R$ болғанда
  $$S'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots \qquad (9)$$
  теңдігі орынды.
- Жинақтылық интервалының ішінде дәрежелік қатарды мүшелеп интегралдауға болады, сондай-ақ (8) қатары үшін $-R<a<x<R$ болғанда
  $$\int_a^x S(t)dt = \int_a^x a_0dt + \int_a^x a_1tdt + \int_a^x a_2t^2dt + \int_a^x a_3t^3dt + \ldots + \int_a^x a_nt^ndt + \ldots \qquad (10)$$
  теңдігі орынды.

(9) және (10) қатарларының жинақтылық радиусы берілген дәрежелік қатардың жинақтылық радиусын береді.